Méth. Mat. Phys. - Chapitre 9

Théorie de Sturm-Liouville

EPFL

- **Equation différentielle ordinaire homogène 2^e ordre :** où $\lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\tag{9.1}$$

- **Opérateur linéaire :**

$$\mathcal{L} = p_2\left(x\right)\frac{d^2}{dx^2} + p_1\left(x\right)\frac{d}{dx} + p_0\left(x\right) \tag{9.2}$$

- **Equation aux valeurs propres :** fonctions propres $y_n\left(x\right)$

$$\tag{9.3}$$

- **Linéarité des solutions :** fonctions propres non normées

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big(\alpha_1\, y_m\left(x\right) + \alpha_2\, y_n\left(x\right)\Big) &= \alpha_1\,\mathcal{L}\,y_m\left(x\right) + \alpha_2\,\mathcal{L}\,y_n\left(x\right)\\ &= \alpha_1\,\lambda_m\,y_m\left(x\right) + \alpha_2\,\lambda_n\,y_n\left(x\right) \end{aligned}\tag{9.4}$$

- **Orthonormalité :** mesure $w\left(x\right)dx$ où $w\left(x\right) \in \mathbb{R}_+$ fonction poids

$$\tag{9.5}$$

- **Produits scalaires :** fonctions $y_m(x)$ et $y_n(x) \in \mathcal{H}$ (9.6)

$$\langle\, y_m \,|\, \mathcal{L}\, y_n \,\rangle = \int_a^b y_m^*(x)\Big(p_2(x)\, y_n''(x) + p_1(x)\, y_n'(x) + p_0(x)\, y_n(x) \Big)\, w(x)\, dx$$

$$\langle\, \mathcal{L}\, y_m \,|\, y_n \,\rangle = \int_a^b \Big(p_2(x)\, y_m^{*\prime\prime}(x) + p_1(x)\, y_m^{*\prime}(x) + p_0(x)\, y_m^*(x) \Big)\, y_n(x)\, w(x)\, dx$$

- **Différence entre les produits scalaires :** intégration par parties

$$\langle\, y_m \,|\, \mathcal{L}\, y_n \,\rangle - \langle\, \mathcal{L}\, y_m \,|\, y_n \,\rangle = \int_a^b \left(y_m^*\, p_2\, w\, y_n'' - \; y_n\, p_2\, w\, y_m^{*\prime\prime} \right) dx$$

$$+ \int_a^b \left(y_m^*\, p_1\, w\, y_n' - \; y_n\, p_1\, w\, y_m^{*\prime} \right) dx + \int_a^b \left(y_m^*\, p_0\, w\, y_n' - \; y_n\, p_0\, w\, y_m^{*\prime} \right) dx$$

$$= \left(y_m^*\, p_2\, w\, y_n' - \; y_n\, p_2\, w\, y_m^{*\prime} \right) \Big|_a^b - \int_a^b \Big(\left(y_m^*\, p_2\, w \right)' y_n' - \left(y_n\, p_2\, w \right)' y_m^{*\prime} \Big)\, dx$$

$$+ \int_a^b \left(y_m^*\, p_1\, w\, y_n' - \; y_n\, p_1\, w\, y_m^{*\prime} \right) dx \qquad (9.7)$$

- **Identité :** intégration par parties

$$\int_a^b \Big(\left(y_m^*\, p_2\, w\right)'\, y_n' - \left(y_n\, p_2\, w\right)'\, y_m^{*\prime} \Big)\, dx$$

$$= \int_a^b \Big(y_m^*\, \left(p_2\, w\right)'\, y_n' - y_n\, \left(p_2\, w\right)'\, y_m^{*\prime} \Big)\, dx + \int_a^b \left(y_m^{*\prime}\, p_2\, w\, y_n' - y_n'\, p_2\, w\, y_m^{*\prime} \right)\, dx$$

$$= \left(p_2\, w\right)' \int_a^b \left(y_m^*\, y_n' - y_n\, y_m^{*\prime} \right)\, dx \tag{9.8}$$

- **Différence entre les produits scalaires :** intégration par parties (9.8)

$$\langle\, y_m \,|\, \mathcal{L}\, y_n \,\rangle - \langle\, \mathcal{L}\, y_m \,|\, y_n \,\rangle = \left(p_2\, w\right) \left(y_m^*\, y_n' - y_n\, y_m^{*\prime} \right) \Big|_a^b \tag{9.9}$$

$$+ \int_a^b y_m^*\, \Big(p_1\, w - \left(p_2\, w\right)' \Big)\, y_n'\, dx - \int_a^b y_n\, \Big(p_1\, w - \left(p_2\, w\right)' \Big)\, y_m^{*\prime}\, dx$$

- **Conditions aux bords :** intervalle $[a, b]$

$$p_2\,(a)\, w\,(a) = p_2\,(b)\, w\,(b) = 0 \tag{9.10}$$

- **Equations différentielles :** conditions aux bords (9.10)

2^e ordre ordinaires	$p_2(x)$	$w(x)$	$p_2(x)\,w(x)$	$[a,b]$
Hermite	1	e^{-x^2}	e^{-x^2}	$[-\infty,\infty]$
Laguerre	x	e^{-x^2}	$x\,e^{-x^2}$	$[0,\infty]$
Laguerre généralisés	x	$x^k\,e^{-x^2}$	$x^{k+1}\,e^{-x^2}$	$[0,\infty]$
Legendre	$1-x^2$	1	$1-x^2$	$[-1,1]$
Legendre généralisés	$1-x^2$	1	$1-x^2$	$[-1,1]$

- **Terme de bord :**

$$p_2\,w\,(y_m^*\,y_n' - y_n\,y_m^{*\prime})\Big|_a^b = 0 \tag{9.11}$$

- **Différence entre les produits scalaires :** (9.11) donne (9.12)

$$\langle\, y_m \,|\, \mathcal{L}\, y_n \,\rangle - \langle\, \mathcal{L}\, y_m \,|\, y_n \,\rangle = \Big(p_1\,w - (p_2\,w)'\Big)\int_a^b (y_m^*\,y_n' - y_n\,y_m^{*\prime})\,dx$$

- **Opérateur hermitien :** auto-adjoint : $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\dagger}$

$$ \tag{9.13} $$

- **Condition d'hermicité :** (9.13) dans (9.12) : choix de $w\,(x)$

$$ \tag{9.14} $$

- **Opérateur hermitien :** valeurs propres réelles : $\lambda_n = \lambda_n^*$

$$\langle\, y_n \,|\, \mathcal{L}\, y_n \,\rangle - \langle\, \mathcal{L}\, y_n \,|\, y_n \,\rangle = (\lambda_n - \lambda_n^*) \int_a^b y_n^*\,(x)\, y_n\,(x)\, w\,(x)\, dx \tag{9.15}$$

$$= (\lambda_n - \lambda_n^*)\, \langle\, y_n \,|\, y_n \,\rangle = \lambda_n - \lambda_n^* = 0$$

- **Fonction de poids :**

$$ \tag{9.16} $$

- **Démonstration :**

$$\left(p_2(x)\,w(x)\right)' = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}\,\exp\left(\int^x \frac{p_1(x')}{p_2(x')}\,dx'\right) = p_1(x)\,w(x) \qquad (9.17)$$

- **Equation différentielle ordinaire :** (9.1) multipliée par $w(x)$: (9.18)

$$p_2(x)\,w(x)\,y_n''(x) + p_1(x)\,w(x)\,y_n'(x) + \left(p_0(x) - \lambda_n\right)w(x)\,y_n(x) = 0$$

- **Condition d'hermicité :** (9.14) dans (9.18) : (9.19)

$$p_2(x)\,w(x)\,y_n''(x) + \left(p_2(x)\,w(x)\right)'y_n'(x) + \left(p_0(x) - \lambda_n\right)w(x)\,y_n(x) = 0$$

- **Equation différentielle de Sturm-Liouville :** (9.19)

$$(9.20)$$

- **Solutions polynomiales :** degré n : conditions (notes)

1. $p_2(x) = \alpha_2\,x^2 + \alpha_1\,x + \alpha_0$
2. $p_1(x) = \beta_1\,x + \beta_0$
3. $p_0(x) = 0$

- **Formule de Rodrigues :** solutions polynomiales (notes : démonstration)

$$(9.28)$$

- **Fonction génératrice :** des solutions de l'équation différentielle

$$(9.47)$$

- **Dérivée de la fonction génératrice :** en $t = 0$ ainsi $k = n$

$$\frac{\partial^n g(x,t)}{\partial t^n}\bigg|_{t=0} = \sum_{k=n}^{\infty} c_k\, y_k(x)\, n!\, t^{k-n}\bigg|_{t=0} = c_n\, n!\, y_n(x) \tag{9.48}$$

- **Formule intégrale de Cauchy :** (2.14)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-x}\, dz \tag{9.49}$$

- **Dérivée de la formule de Cauchy :** dérivée par rapport à x

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - x)^{n+1}} \, dz \tag{9.50}$$

- **Dérivée de la fonction génératrice :** $g(x, t)$ par rapport à t

$$\frac{\partial^n g(x, t)}{\partial t^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{g(x, z)}{(z - t)^{n+1}} \, dz \tag{9.51}$$

- **Intégrale de contour :** (9.51) dans (9.50)

$$y_n(x) = \frac{1}{c_n \, n!} \left. \frac{\partial^n g(x, t)}{\partial t^n} \right|_{t=0} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{c_n} \oint_{\mathcal{C}} \frac{g(x, z)}{z^{n+1}} \, dz \tag{9.52}$$

- **Formules de Rodrigues :**

$$y_n(x) = \frac{c_n}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \Big(w(x) \, p_2^n(x) \Big) \tag{9.28}$$

- **Intégrale de Schlaefli :** (9.50) où $f(x) = w(x) \, p_2^n(x)$ dans (9.28)

$$\tag{9.53}$$

- **Fonctions propres :** espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et son dual $\mathcal{H}^*$ où $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^*$

$$y_n(x) = \langle\, x \,|\, y_n \,\rangle \tag{9.54}$$

$$y_m^*(x) = \langle\, x \,|\, y_m \,\rangle^* = \langle\, y_m \,|\, x \,\rangle \tag{9.55}$$

- **Solution générale :** (9.1) combinaison linéaire de fonctions propres

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, y_n(x) \tag{9.56}$$

- **Solution générale :** (9.54) dans (9.56)

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle\, x \,|\, y_n \,\rangle \tag{9.57}$$

- **Base orthonormée :** fonctions propres $\equiv$ vecteurs ket : base de $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} |\, y \,\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \,|\, y_n \,\rangle = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_m\, \delta_{nm} \,|\, y_n \,\rangle = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_m \langle\, y_n \,|\, y_m \,\rangle \,|\, y_n \,\rangle \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} c_m \,|\, y_n \,\rangle \langle\, y_n \,|\, y_m \,\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\, y_n \,\rangle \langle\, y_n \,|\, y \,\rangle = \hat{1} \,|\, y \,\rangle \end{aligned} \tag{9.58}$$

- **Relation de fermeture :** somme discrète de projecteurs

$$(9.59)$$

- **Orthonormalité :** fonctions propres

$$\langle\, y_m \,|\, y_n \,\rangle = \int_a^b y_m^*\,(x)\, y_n\,(x)\, w\,(x)\, dx = \int_a^b \langle\, y_m \,|\, x \,\rangle \langle\, x \,|\, y_n \,\rangle\, w\,(x)\, dx$$

$$= \langle\, y_m \,|\left(\int_a^b |\, x \,\rangle \langle\, x \,|\, w\,(x)\, dx \right) |\, y_n \,\rangle = \delta_{mn} \qquad (9.60)$$

- **Relation de fermeture :** somme continue pondérée de projecteurs

$$(9.61)$$

- **Relations de fermeture :** sommes de projecteurs (9.59) et (9.61)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\, y_n \,\rangle \langle\, y_n \,| = \hat{1} \qquad \text{et} \qquad \int_a^b |\, x \,\rangle \langle\, x \,|\, w\,(x)\, dx = \hat{1}$$

- **Propagation :** fonction propre : relation de fermeture (9.61)

$$\begin{aligned} y_n\,(x) &= \langle\, x \,|\, y_n \,\rangle = \langle\, x \,|\, \hat{1} \,|\, y_n \,\rangle = \int_a^b \langle\, x \,|\, x' \,\rangle \langle\, x' \,|\, y_n \,\rangle\, w\,(x')\, dx' \\ &= \int_a^b y_n\,(x')\, \langle\, x \,|\, x' \,\rangle\, w\,(x')\, dx' = \int_a^b y_n\,(x')\, \delta\,(x - x')\, dx' \end{aligned} \tag{9.62}$$

- **Distribution de Dirac :** (9.62)

$$\delta\,(x - x') = \langle\, x \,|\, x' \,\rangle\, w\,(x') = \langle\, x \,|\, \hat{1} \,|\, x' \,\rangle\, w\,(x') \tag{9.63}$$

- **Distribution de Dirac :** (9.59) dans (9.63)

- **Equation aux valeurs propres :** (9.3) : fonctions propres $y_n(x)$

$$\mathcal{L}\, y_n(x) = \langle\, x \,|\, \mathcal{L}\, y_n \,\rangle = \lambda_n \,\langle\, x \,|\, y_n \,\rangle = \lambda_n\, y_n(x) \qquad (9.64)$$

- **Equation aux valeurs propres :** (9.64) et relation de fermeture $(9.5s9)$

$$\mathcal{L}\,|\, y_m \,\rangle = \lambda_m \,|\, y_m \,\rangle = \lambda_m\, \hat{1}\,|\, y_m \,\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \,|\, y_n \,\rangle \langle\, y_n \,|\, y_m \,\rangle \qquad (9.66)$$

- **Décomposition spectrale :** opérateur linéaire $\mathcal{L}$ et inverse $\mathcal{L}^{-1}$

(9.67)

(9.68)

Mêmes sous-espaces et mêmes projecteurs : $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^{-1}$ commutent

- **Démonstration :**

$$\mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{L} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m} \,|\, y_m \,\rangle \langle\, y_m \,| \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \,|\, y_n \,\rangle \langle\, y_n \,| \right) \tag{9.69}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_m} \,|\, y_m \,\rangle \langle\, y_m \,|\, y_n \,\rangle \langle\, y_n \,| = \sum_{n=1}^{\infty} |\, y_n \,\rangle \langle\, y_n \,| = \hat{1} \qquad \square$$

- **Equation différentielle ordinaire inhomogène 2^e ordre :**

$$\tag{9.70}$$

- **Equation différentielle :** (9.70) : opérateur différentiel (9.2)

$$\left(\mathcal{L} + k^2\,\hat{1}\right) y\,(x) = f\,(x) \tag{9.71}$$

- **Opérateur différentiel linéaire :**

$$\mathcal{D} = \mathcal{L} + k^2\,\hat{1} \tag{9.72}$$

- **Equation différentielle :** (9.72) dans (9.71)

$$\mathcal{D}\,y\,(x) = f\,(x) \tag{9.73}$$

- **Solution générale :**

$$y(x) = \mathcal{D}^{-1} f(x) \tag{9.74}$$

- **Décomposition spectrale :** opérateur linéaire $\mathcal{D}$ et inverse $\mathcal{D}^{-1}$

(9.75)

(9.76)

Mêmes sous-espaces et mêmes projecteurs : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^{-1}$ commutent (9.77)

$$\mathcal{D}^{-1} \circ \mathcal{D} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_m} \,|\, y_m \,\rangle \langle\, y_m \,| \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(k^2 + \lambda_n\right) |\, y_n \,\rangle \langle\, y_n \,| \right)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{k^2 + \lambda_n}{k^2 + \lambda_m} \,|\, y_m \,\rangle \langle\, y_m \,|\, y_n \,\rangle \langle\, y_n \,| = \sum_{n=1}^{\infty} |\, y_n \,\rangle \langle\, y_n \,| = \hat{1}$$

- **Solution générale :** (9.74)

$$
\begin{aligned}
y\left(x\right) &= \mathcal{D}^{-1} f\left(x\right) = \langle\, x \,|\, \mathcal{D}^{-1} f\,\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+\lambda_n} \langle\, x \,|\, y_n \,\rangle \langle\, y_n \,|\, f\,\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+\lambda_n}\, y_n\left(x\right) \langle\, y_n \,|\, \hat{1} \,|\, f\,\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+\lambda_n}\, y_n\left(x\right) \int_a^b \langle\, y_n \,|\, x' \,\rangle \langle\, x' \,|\, f\,\rangle\, w\left(x'\right) dx' \qquad (9.78) \\
&= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+\lambda_n}\, y_n\left(x\right) y_n^*\left(x'\right) f\left(x'\right) w\left(x'\right) dx'
\end{aligned}
$$

- **Solution :** produit de convolution pondéré (1.12)

$$(9.79)$$

- **Fonction de Green :** fonctions propres où $\lambda_n = \lambda_n^*$

$$(9.80)$$

- **Fonction de Green :** produit de fonctions propres pondérées (9.81)

$$G\left(x - x'\right) = \langle\, x \,|\, \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n} \,|\, y_n \,\rangle \langle\, y_n \,|\right) |\, x' \,\rangle = \langle\, x \,|\, \mathcal{D}^{-1} \,|\, x' \,\rangle$$

- **Equation de Green :** (9.63) et (9.81)

$$\mathcal{D}\, G\left(x - x'\right) = \mathcal{D}\, \langle\, x \,|\, \mathcal{D}^{-1} \,|\, x' \,\rangle = \langle\, x \,|\, \mathcal{D} \circ \mathcal{D}^{-1} \,|\, x' \,\rangle =$$

$$= \langle\, x \,|\, \hat{1} \,|\, x' \,\rangle = \langle\, x \,|\, x' \,\rangle = \frac{\delta\left(x - x'\right)}{w\left(x'\right)} \qquad (9.82)$$

- **Equation de Green :** pondérée

$$(9.83)$$

- **Fonctions propres normées :** où $w\left(x\right) \in \mathbb{R}_+$

$$\varphi_n\left(x\right) = \sqrt{w\left(x\right)}\, y_n\left(x\right) \qquad \text{et} \qquad \varphi_n^*\left(x\right) = \sqrt{w\left(x\right)}\, y_n^*\left(x\right) \qquad (9.84)$$

- **Orthonormalité :** vecteurs propres normés (9.84) dans (9.5)

$$(9.85)$$

- **Ondes stationnaires :** fonctions propres sur une corde vibrante

$$ \tag{9.105} $$

- **Opérateur différentiel linéaire :**

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} \tag{9.106}$$

- **Equation aux valeurs propres :** fonctions propres

$$y_n''(x) = \mathcal{L}\, y_n(x) = \lambda_n\, y_n(x) \tag{9.107}$$

- **Valeurs propres :**

$$\lambda_n = -\,k_n^2 \tag{9.108}$$

- **Coefficients :**

$$p_0(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad p_1(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad p_2(x) = 1 \tag{9.109}$$

- **Fonction poids :**

$$w(x) = \frac{1}{p_2(x)} \exp\left(\int^x \frac{p_1(x')}{p_2(x')}\, dx'\right) = 1 \tag{9.110}$$

- **Orthonormalité :** fonctions propres normées (9.5) avec $w(x) = 1$

$$\langle\, y_m \,|\, y_n \,\rangle = \int_0^L y_m^*(x)\, y_n(x)\, dx = \delta_{mn} \tag{9.111}$$

- **Conditions aux bords :** corde fixée en $x = 0$ et $x = L$

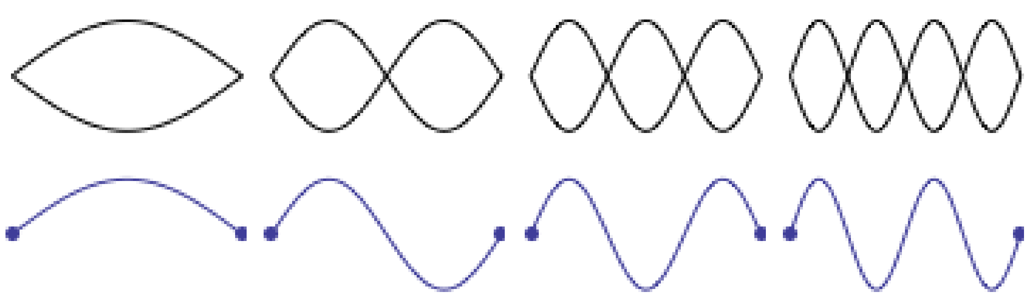
(9.112)

- **Fonctions propres normées :** (9.107) et (9.112) série de Fourier impaire

$$y_n(x) = b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{9.113}$$

- **Equation aux valeurs propres :** (9.113) dans (9.107)

$$y_n''(x) = -\left(\frac{n\pi x}{L}\right)^2 b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \lambda_n\, b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{9.114}$$



- **Valeurs propres :** (9.114)

$$\lambda_n = -\, k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \tag{9.115}$$

- **Orthonormalité :** fonctions propres normées (9.113) dans (9.111)

$$\langle\, y_m \,|\, y_n \,\rangle = b_m^*\, b_n \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn} \tag{9.116}$$

- **Relation d'orthonormalité :**

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn} \tag{9.117}$$

- **Coefficient :** (9.116) et (9.117)

$$|\, b_n \,|^2 = b_n^*\, b_n = \frac{2}{L} \qquad \text{ainsi} \qquad b_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \tag{9.118}$$

- **Fonctions propres normées :** (9.118) dans (9.113)

$$\tag{9.119}$$

- **Ondes stationnaires entretenues :** sur une corde vibrante

$$ \tag{9.103} $$

La fonction $f(x)$ rend compte de la force d'entraînement périodique en régime stationnaire.

- **Equation aux valeurs propres :** opérateur différentiel linéaire $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D}\, y(x) = \left(\mathcal{L} + k^2\, \hat{1}\right) y(x) = f(x) \tag{9.104}$$

- **Fonction de Green :**

$$\begin{aligned} G(x - x') &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \lambda_n}\, y_n(x)\, y_n^*(x') \\ &= \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) \end{aligned} \tag{9.120}$$

- **Mouvement vertical :** produit de convolution $(G * f)(x)$

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^L G(x - x')\, f(x')\, dx' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) f(x')\, dx' \end{aligned} \tag{9.121}$$

- **Terme d'entraînement :** condition aux bords

$$f\left(0\right)=f\left(L\right)=0 \tag{9.122}$$

- **Terme d'entraînement :** série de Fourier impaire

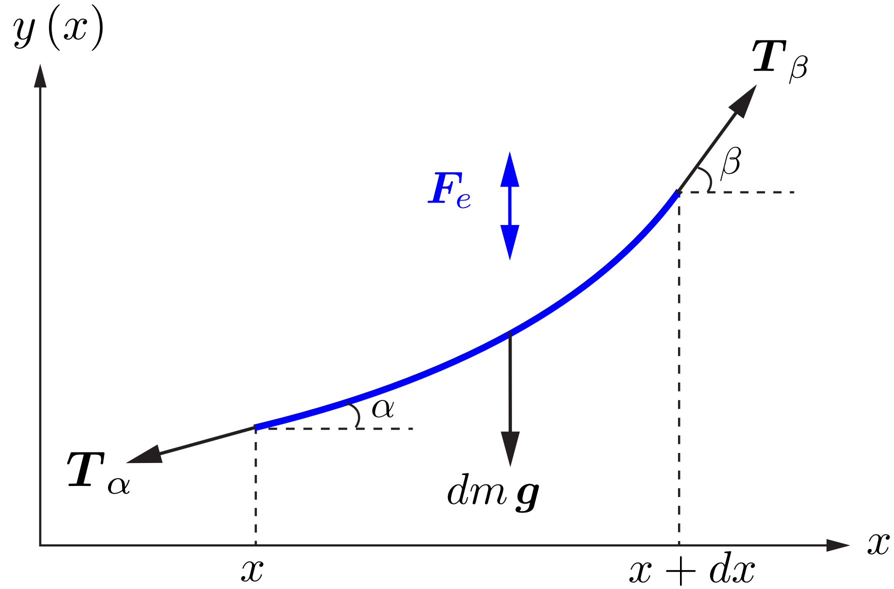
$$f\left(x'\right)=\sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \tag{9.123}$$

- **Mouvement vertical :** (9.123) dans (9.121) et (6.40) orthonormalité

$$\begin{aligned} y\left(x\right) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_m}{k^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) dx' \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_m}{k^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \delta_{mn} \end{aligned} \tag{9.124}$$

- **Mouvement vertical :**

$$\tag{9.125}$$



- **Force d'entraînement périodique verticale :** élément infinitésimal

$$\boldsymbol{F}_e = dm\, a_0(x)\cos(\omega_0 t)\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{9.86}$$

- **Equation du mouvement :** élément infinitésimal de corde homogène

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{T}_\alpha + \boldsymbol{T}_\beta + \boldsymbol{F}_e + dm\,\boldsymbol{g} = dm\,\boldsymbol{a} \tag{9.87}$$

- **Projections :** petits angles : $\alpha \ll 1$ et $\beta \ll 1$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{x}} : \quad -T_\alpha + T_\beta = 0 \tag{9.88}$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{y}} : \quad -T_\alpha\,\alpha + T_\beta\,\beta + dm\Big(a_0(x)\cos(\omega_0 t) - g\Big) = dm\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

- **Petits angles :** $\alpha \ll 1$ et $\beta \ll 1$ avec $T = T_\alpha = T_\beta$

$$\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{\partial y\left(x,t\right)}{\partial x}$$
$$\beta \simeq \tan\beta = \frac{\partial y\left(x+dx,t\right)}{\partial x} \tag{9.90}$$

- **Mouvement vertical :** (9.91)

$$\frac{\partial y\left(x+dx,t\right)}{\partial x} - \frac{\partial y\left(x,t\right)}{\partial x} - \frac{dm}{T}\,\frac{\partial^2 y\left(x,t\right)}{\partial t^2} = \frac{dm}{T}\Big(g - a_0\left(x\right)\cos\left(\omega_0 t\right)\Big)$$

- **Identité infinitésimale :**

$$\frac{\partial y\left(x+dx,t\right)}{\partial x} = \frac{\partial y\left(x,t\right)}{\partial x} + \frac{\partial^2 y\left(x,t\right)}{\partial x^2}\,dx \tag{9.92}$$

- **Densité linéique constante :** corde homogène

$$\mu = \frac{dm}{dx} \tag{9.93}$$

- **Corde tendue :**

$$dm\,g \ll T \tag{9.94}$$

- **Mouvement vertical :** onde transversale (9.91) - (9.94)

$$\frac{\partial^2 y\,(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\,\frac{\partial^2 y\,(x,t)}{\partial t^2} = -\,\frac{\mu}{T}\,a_0\,(x)\cos\left(\omega_0 t\right) \tag{9.95}$$

- **Vitesse du son :** le long de la corde

$$c_s = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{9.96}$$

- **Ondes transversales :** corde de longueur L

$$\tag{9.97}$$

- **Transformée de Fourier inverse :** temporelle (7.17)

$$\frac{\partial^2 y\,(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\,\infty}^{\infty} \tilde{y}''\,(x,\omega)\,e^{-\,i\omega t}\,d\omega$$

$$\frac{\partial^2 y\,(x,t)}{\partial t^2} = -\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\,\infty}^{\infty} \omega^2\,\tilde{y}\,(x,\omega)\,e^{-\,i\omega t}\,d\omega \tag{9.98}$$

- **Transformée de Fourier inverse :** temporelle (7.17) où $\omega_0 > 0$

$$\cos\left(\omega_0 t\right) = \frac{e^{\,i\omega_0 t} + e^{-\,i\omega_0 t}}{2} \qquad (9.98)$$

$$= \int_{-\,\infty}^{\infty} \frac{\delta\left(\omega - \,\omega_0\right) + \delta\left(\omega + \omega_0\right)}{2}\; e^{-\,i\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\,\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\; \delta\left(\omega - \,\omega_0\right)\; e^{-\,i\omega t}\, d\omega$$

- **Onde stationnaire :** ω fixé (9.98) dans (9.97) : intégrant

$$\tilde{y}''\left(x,\omega\right) + \frac{\omega^2}{c_s^2}\,\tilde{y}\left(x,\omega\right) = -\,\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{a_0\left(x\right)}{c_s^2}\,\delta\left(\omega - \,\omega_0\right) \equiv \tilde{f}\left(x,\omega\right) \qquad (9.99)$$

- **Relation de dispersion :** $y\left(x\right) = \tilde{y}\left(x,\omega\right)$ et $f\left(x\right) = \tilde{f}\left(x,\omega\right)$

$$k = \frac{\omega}{c_s} \qquad (9.100)$$

- **Ondes stationnaires entretenues :** corde vibrante (9.100) dans (9.99)

$$(9.101)$$